Riemannoppervlakken en overdekkingen

Stefan van der Lugt

Schoven

Zij X een topologische ruimte.

Definitie Een *schoof* van reëelwaardige functies $\mathcal{F}$ op X bestaat uit: voor elke open $U \subseteq X$ een $\mathbb{R}$-algebra $\mathcal{F}(U)$ van functies $U \to \mathbb{R}$, zodanig dat:

- Voor $V \subseteq U \subseteq X$ open, en $f \in \mathcal{F}(U)$, geldt $f|_V \in \mathcal{F}(V)$;
- Voor $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ een open overdekking, en $f : U \to \mathbb{R}$ zodanig dat $f|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ voor alle $i \in I$, geldt dat $f \in \mathcal{F}(U)$.

Analoog: schoof van complexwaardige functies.

Voorbeelden van schoven:

- Schoof van C^k (met $0 \leqslant k \leqslant \infty$) functies op een open $U \subseteq \mathbb{R}^n$;
- Schoof van holomorfe functies op een open $U \subseteq \mathbb{C}^n$;
- Schoof van lokaal constante functies.

Niet-voorbeeld 'Schoof' van constante functies.

Opmerking Schoven zijn families van functies die voldoen aan bepaalde *lokale* eigenschappen (zoals differentieerbaar, holomorf, lokaal constant). Dit zijn eigenschappen die puntsgewijs op (kleine) open omgevingen kunnen worden gecontroleerd.

Restrictie $U \subset X$ een open. Dan definieert de schoof $\mathcal{F}$ op X een schoof op U, genoteerd als $\mathcal{F}|_U$.

Algemeen Een preschoof is een contravariante functor $\mathbf{Open}(X) \to \mathbf{Ab}$. Een schoof is een preschoof met *plakeigenschap*.

Riemannoppervlakken

Riemannoppervlak Een *Riemannoppervlak* is een topologische ruimte X, samen met een schoof O_X van complexwaardige functies, zodanig dat:

- X is Hausdorff
- Voor elk punt $p \in X$ bestaat er een open omgeving $U \ni p$, een open $U' \subset \mathbb{C}$, en een homeomorfisme $\phi : U \xrightarrow{\sim} U'$, zodanig dat $O_X|_U \cong O_{U'}$ (schoof van holomorfe functies op U') onder ϕ.

Holomorfe functies Elementen van de schoof O_X zijn holomorfe functies op X.

Opmerking Een Riemannoppervlak is een ruimte die 'lokaal' op $\mathbb{C}$ lijkt.

Morfismen Een *morfisme* van Riemannoppervlakken is een continue afbeelding $\phi : X \to Y$, zodanig dat voor iedere open $V \subseteq Y$ en iedere $f \in O_Y(V)$ de samenstelling $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \to \mathbb{C}$ in $O_X(\phi^{-1}(V))$ ligt.

Categorie van Riemannoppervlakken Objecten: Riemannoppervlakken. Morfismen: morfismen.

Voorbeelden Een paar Riemannoppervlakken:

- $\mathbb{C}$ en opens in $\mathbb{C}$ (bijvoorbeeld $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$);
- $X = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

  Topologie Bevat $\mathbb{C}$ als open deelverzameling. Basis open omgevingen van ∞ zijn $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \delta\} \cup \{\infty\}$ met $\delta > 0$.

Holomorfe functies $U \subset X$. Als $\infty \notin U$ dan $O_X(U) = O_{\mathbb{C}}(U)$. Als $\infty \in U$ dan

$$O_X(U) = \{f \in O_{\mathbb{C}}(U - \{\infty\}) : f(1/z) \text{ heeft een ophefbare singulariteit in } z = 0\}.$$

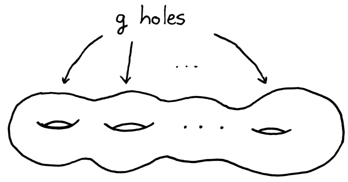
Riemann-oppervlak $\mathbb{C} \subset X$ en $X \backslash \{0\}$ (via $z \mapsto 1/z$) zijn homeomorf met $\mathbb{C}$.
Holomorfe functies op X Zij $f : X \to \mathbb{C}$ holomorf. Dan is $f : X \to \mathbb{C}$ constant (Liouville).

- $\Lambda \subset \mathbb{C}$ discrete ondergroep (bijv. rooster (bijv. $\mathbb{Z}[i]$)). Dan is $\mathbb{C}/\Lambda$ een Riemannoppervlak.

Meromorfe functies X Riemannoppervlak. *Meromorfe functies* $X \to \mathbb{C}$ zijn morfismen $X \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Compacte Riemannoppervlakken en geslacht Zij X een compact en samenhangend Riemannoppervlak. Er bestaat een unieke $g \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ zodanig dat:

- X is homeomorf met de 2-sfeer met g handvatten;
- $\pi_1(X) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$;
- $H_1(X) = \pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$.



We noemen g het *geslacht* van X.

Overdekkingen

Overdekkingen X Riemannoppervlak, $f : X' \to X$ overdekking. Dan erft X' de structuur van een Riemannoppervlak van X, en $f : X' \to X$ is een morfisme.

Universele overdekkingen X samenhangend, dan heeft X een universele overdekking; dit is een enkelvoudig samenhangend Riemannoppervlak.

Enkelvoudig samenhangende Riemannoppervlakken zijn $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$. Deze zijn verschillend: $\widehat{\mathbb{C}}$ is compact, en $\mathbb{C}$ en $\mathbb{H}$ niet. Er bestaat een begrensde holomorfe niet-constante functie $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ (namelijk $z \mapsto \exp(2\pi i z)$); zo'n functie bestaat niet op $\mathbb{C}$ (Liouville).

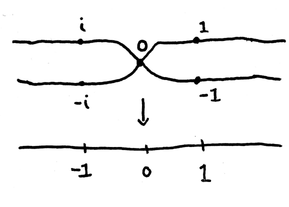
Geslacht en universele overdekking X compact en samenhangend, geslacht g; $f : \tilde{X} \to X$ universele overdekking;

$$g = 0 \iff \tilde{X} \cong \widehat{\mathbb{C}};$$
$$g = 1 \iff \tilde{X} \cong \mathbb{C};$$
$$g \geqslant 2 \iff \tilde{X} \cong \mathbb{H}.$$

Vertakte overdekkingen

Multipliciteit $f : X \to Y$ niet-constant morfisme van samenhangende Riemannoppervlakken. Voor elke $x \in X$ bestaat er een unieke $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ zodat f rond x 'zich gedraagt als' $z \mapsto z^n$. Dat wil zeggen: x heeft een open omgeving $U \subset X$, en $f(x)$ een open omgeving $V \subset X$ met $f(U) = V$, zodanig dat $|f^{-1}(y) \cap U| = n$ voor alle $y \in V \backslash \{f(x)\}$, en $|f^{-1}(f(x)) \cap U| = 1$. We noteren deze n als $m_x(f)$.

Voorbeeld de afbeelding $z \mapsto z^2$ op $\mathbb{C}$.



Vertakkingen Punten $x \in X$ met $m_x(f) \geqslant 2$ heten *vertakkingspunten*. De verzameling van vertakkingspunten is gesloten en discreet. Als $U = \{x \in X : m_x(f) = 1\}$, dan is $f : U \to f(U)$ een overdekking.

Graad X compact. Voor alle $y \in Y$ is $\sum_{x \in f^{-1}(y)} m_x(f)$ gelijk en eindig. Dit getal heet de *graad* van f, geschreven als $\deg(f)$.

Riemann–Hurwitz $f : X \to Y$ niet-constant morfisme van compacte samenhangende Riemannoppervlakken. Dan geldt:

$$2g(X) - 2 = \deg(f) \cdot (2g(Y) - 2) + \sum_{x \in X} (m_x(f) - 1).$$

Voorbeeld $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}} : z \mapsto z^n$. Graad n, en vertakt in 0 en ∞ met multipliciteit n. Check: $-2 = -2 \cdot n + (n-1) + (n-1)$.

Gevolg X en Y compacte samenhangende Riemannoppervlakken. Als $g(X) < g(Y)$ dan is ieder morfisme $f : X \to Y$ constant.